Решение задачи линейного программирования симплекс-методом.

Для решения задачи линейного программирования симплекс-методом необходимо математическую модель представить в канонической форме. Для этого max целевой функции надо заменить на min и поменять знаки слагаемых выражения целевой функции. В неравенства ограничений вводятся дополнительные свободные переменные. Если неравенство имеет вид ≤ , то дополнительная переменная вводится со знаком «+», если ≥ , то со знаком «−».

**Пример.** Дана следующая математическая модель:

Заданная математическая модель задачи линейного программирования в канонической форме будет иметь следующий вид:

Алгоритм симплекс-метода для решения задач линейного программирования, заданных в канонической форме, реализуется в виде так называемой симплекс-таблицы.

В первом столбце этой таблицы располагаются обозначения векторов, входящих в базис.

Второй столбец – коэффициенты F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image222l.gif целевой функции, соответствующие векторам, входящим в базис.

Третий столбец – компоненты опорного плана. В дополнительной строке в этом столбце пишется величина F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image223l.gif. Её легко вычислить перемножая числа из второго столбца и третьего столбца и складывая их.

Далее идут столбцы, соответствующие всем векторам F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image224l.gif, и в этих столбцах записываются координаты этих векторов в рассматриваемом базисе. Заметим, что для векторов, входящих в базис, эти координаты имеют вид (0,0, ... ,0,1,0, ..., 0), где единица стоит в той строке, где находится сам этот базисный вектор.

В дополнительной строке сверху обычно выписывают коэффициенты F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image225l.gif, соответствующие этим векторам.

В дополнительной строке снизу пишутся величины F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image226l.gif, вычисляемые по формулам:

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image227l.gif.**

Заметим, что для векторов, входящих в базис, эти разности всегда равны нулю.

Далее идут следующие этапы, связанные с преобразованием этой таблицы.

**Этап 1**

Просматривается дополнительная строка снизу, где записаны разности *zj* – *cj*. Если все эти разности F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image229l.gif, то план является оптимальным.

**Этап 2**

Если есть столбцы, где F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image230l.gif, то выбирается столбец с максимальным значением этой разности. Индекс *j* определит вектор, вводимый в базис.

Пусть F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image231l.gif, то есть в базис надо вводить вектор F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image232l.gif. Назовем столбец, соответствующий этому вектору, **направляющим столбцом**. В дальнейшем мы будем направляющий столбец помечать символом F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image233l.gif.

**Этап 3**

Просматривается столбец, соответствующий этому вектору. Если все **F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image234l.gif**, то значения целевой функции неограничены снизу. Если есть **F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image235l.gif**, то находятся

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image236l.gif**,

где просматриваются лишь те дроби F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image237l.gif, для которыхF:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image238l.gif.

Пусть этот минимум достигается для вектора F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image239l.gif. Тогда именно вектор F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image239l.gifподлежит выводу из базиса. Строка, соответствующая этому вектору, называется **направляющей строкой**. В дальнейшем в примерах мы будем помечать ее символом F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image240l.gif.

**Этап 4**

После того, как определены направляющие столбец и строка, начинает заполняться новая симплекс-таблица, в которой на месте направляющей строки будет стоять векторF:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image241l.gif.

Обычно заполнение этой новой таблицы начинается именно с направляющей строки. В качестве компоненты опорного плана туда пишется величина F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image242l.gif, то есть

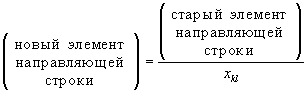
**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image243l.gif**.

Остальные элементы этой строки заполняются величинами

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image244l.gif.**

Обратите внимание на особую роль элемента F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image245l.gif, стоящего на пересечении направляющей строки и направляющего столбца. Именно на него делятся все бывшие элементы направляющей строки. На месте бывшего элемента F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image245l.gifавтоматически появляется единица.

Написанные выше формулы для пересчета элементов направляющей строки можно записать следующим правилом:

**.**

**Этап 5**

Далее начинается пересчет всех остальных строк таблицы, включая и дополнительную нижнюю строку по формулам:

для компонент плана

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image247l.gif;**

для координат разложения по базису

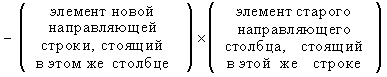
**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image248l.gif;**

для дополнительной строки

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image249l.gif.**

Обратите внимание на то, что все эти формулы по сути дела строятся по одному правилу

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image250l.gif**

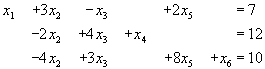
**.**

Это правило применимо и к компонентам плана, и к величинам F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image252l.gif, и к разностям F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image253l.gif. Его даже можно использовать для пересчета элементов самого направляющего столбца, хотя проще заполнить его нулями, оставив 1 на месте бывшего элемента F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image254l.gif.

Далее итерации продолжаются.

**Пример.** Решить задачу линейного программирования, математическая модель которой в канонической форме имеет следующий вид:

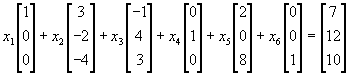
**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image255l.gif**

****

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image257l.gif**

**Решение**

В данном случае вектор F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image258l.gifравен (0,1,-3,0,2,0), а в векторной форме ограничения могут быть записаны в виде

**.**

Заполним исходную симплекс-таблицу, взяв в качестве исходного базиса вектора F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image260l.gif, что удобно из-за их вида.

Исходная симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базис | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image261l.gif | План | 0 | 1 | -3 | 0 | 2 | 0 |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image262l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image263l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image264l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image265l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image266l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image267l.gif |
|  | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image262l.gif | 0 | 7 | 1 | 3 | -1 | 0 | 2 | 0 |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image268l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image265l.gif | 0 | 12 | 0 | -2 | 4 | 1 | 0 | 0 |
|  | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image267l.gif | 0 | 10 | 0 | -4 | 3 | 0 | 8 | 1 |
|  |  |  | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | -2 | 0 |
|  |  |  |  |  |  | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image269l.gif |  |  |  |

Обратите внимание на то, что из-за специфического вида векторов F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image270l.gifв столбец "план" просто переписался вектор F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image271l.gif, а в качестве координат векторов в нашем базисе стоят просто сами векторы.

Расчитываем величины F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image272l.gif:

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image273l.gif**

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image274l.gif**

**Первая итерация**

Просматривая дополнительную строку мы видим, что в ней всего один положительный элемент – в столбце, соответствующем вектору F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image275l.gif. Следовательно, этот вектор надо вводить в базис и этот столбец и будет направляющим столбцом.

В этом направляющем столбце есть два положительных числа – 4 и 3. Поэтому нужно рассмотреть два частных

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image276l.gif**

и выбрать из них наименьшее. Так как

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image277l.gif**

и он достигается на векторе F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image278l.gif, то этот вектор подлежит выводу из базиса и соответствующая ему строка и будет направляющей строкой.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базис | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image261l.gif | План | 0 | 1 | -3 | 0 | 2 | 0 |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image262l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image263l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image264l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image265l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image266l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image267l.gif |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image279l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image262l.gif | 0 | 10 | 1 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image280l.gif | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image281l.gif | 2 | 0 |
|  | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image282l.gif | -3 | 3 | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image283l.gif | 1 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image281l.gif | 0 | 0 |
|  | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image267l.gif | 0 | 1 | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image284l.gif | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image285l.gif | 8 | 1 |
|  |  |  | -9 | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image286l.gif | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image285l.gif | -2 | 0 |
|  |  |  |  |  | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image287l.gif |  |  |  |  |

Заполним теперь новую симплекс-таблицу, следуя сформулированным выше правилам. Заполнение начинается со второй строки (так как она была направляющей), а затем пересчитываются все остальные строки.

**Вторая итерация**

Просматривая дополнительную строку мы вновь видим в ней всего один положительный элемент это 1/2, стоящая в столбце вектора F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image288l.gif. Следовательно, этот вектор надо ввести в базис и этот столбец будет направляющим.

В столбце, соответствующем вектору F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image289l.gif, всего один положительный элемент это 5/2, который стоит в первой строке. Поэтому первая строка будет направляющей и вектор F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image290l.gif должен быть выведен из базиса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image261l.gif | План | 0 | 1 | -3 | 0 | 2 | 0 |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image262l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image263l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image264l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image265l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image266l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image267l.gif |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image291l.gif | 1 | 4 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image292l.gif | 1 | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image293l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image294l.gif | 0 |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image282l.gif | -3 | 5 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image295l.gif | 0 | 1 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image296l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image297l.gif | 0 |
| F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image267l.gif | 0 | 11 | 1 | 0 | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image298l.gif | 10 | 1 |
|  |  | -11 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image299l.gif | 0 | 0 | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image300l.gif | F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image301l.gif | 0 |

Запишем новую симплекс-таблицу, следуя сформулированным выше правилам.

В получившейся таблице в дополнительной строке стоят лишь отрицательные числа и нули. Поэтому получившийся план является оптимальным.

Итак, оптимальный план имеет вид

**F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image302l.gif,**

то есть F:\Исследование операций\Алгоритм симплекс-метода_files\image303l.gif, а все остальные равны 0. Ему соответствует значение целевой функции, равное – 11.